Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 10:

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Phương trình đường thẳng có dạng tổng quát $(d): ax+by+c=0$, $a^2+b^2>0$.

+ Đường thẳng (d) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(a;b)$, và véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-b;a)$.

+ Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=(a;b)$ có dạng: $(d): a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$

+ Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k có dạng: $(d): y=k(x-x_0)+y_0.$

+ Phương trình đoạn chắn đi qua điểm $A(a;0), B(0;b)$ có dạng $(d): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

+ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$ có dạng

$$(d): \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Góc giữa 2 đường thẳng

+ Nếu 2 đường thẳng cho dưới dạng hệ số góc

$$\begin{cases}(d_1): y=a_1x+b_1 \\ (d_2): y=a_2x+b_2\end{cases} \Rightarrow \tan\alpha=\left|\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}\right|, 0\le\alpha\le 90^0.$$

+ Nếu 2 đường thẳng cho dưới dạng tổng quát

$$\begin{cases}(d_1): a_1x+b_1y+c_1=0 \\ (d_2): a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Khoảng các từ một điểm đến một đường thẳng

$$d(M;(d))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Các tính chất trong tam giác

Cho tam giác ABC có 3 đỉnh là A, B, C và trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là I, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có

+ Tọa độ trọng tâm G được xác định bởi

$$\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}.$$

+ Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của tam giác.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của 3 đường phân giác trong của tam giác.

+ Phương trình đường phân giác trong của góc A có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$.

+ Phương trình đường phân giác ngoài của góc A có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ TAM GIÁC

Phương pháp:

- Cho tam giác vuông tại A chẳng hạn thì ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.
- Nếu đề bài cho phương trình đường cao $Ax+By+C=0$ thì cạnh đối diện sẽ nhận véc tơ $\vec{u}=(A;B)$ làm một véc tơ chỉ phương, vậy nếu biết cạnh đối diện đi qua một điểm nữa thì ta viết được phương trình của cạnh đối diện.
- Nếu đề bài cho phương trình của một hoặc hai đường trung tuyến thì ta tìm được trung điểm cạnh đối diện hoặc trọng tâm của tam giác.

Lưu ý: Thường xét mối liên hệ giữa tọa độ ba đỉnh và trọng tâm $\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\ y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}$ hoặc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm cạnh BC.

- Nếu đề bài cho phương trình đường phân giác trong d của một góc, và biết một điểm M thuộc một cạnh bên thì ta tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d

Điểm M' được xác định qua các bước:

1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d.
2. Xác định tọa độ $I=d\cap\Delta$, vì I là trung điểm của MM' $\Rightarrow M'$ theo công thức liên hệ đối xứng qua một điểm.

- Nếu đề bài cho tâm hay bán kính đường tròn nội tiếp, diện tích tam giác thì chú ý công thức liên hệ $S_{ABC}=p.r=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho điểm $A(2;-2)$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3;1)$ và cắt các trục tọa độ tại B,C. Viết phương trình đường thẳng (d), biết rằng tam giác ABC cân tại A.

Lời giải:

Giả sử (d) cắt các trục tọa độ tại $B(b;0),C(0;c)$. Khi đó $(d):\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$.

Do điểm $M(3;1)\in(d)\Rightarrow \frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1(1)$.

Tam giác ABC cân tại $A\Leftrightarrow AB^2=AC^2\Leftrightarrow (2-b)^2+4=4+(2+c)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}b=6\\c=2\end{cases}\vee\begin{cases}b=2\\c=-2\end{cases}$

Vậy có 2 đường thẳng $(d_1):\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1;(d_2):\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1.$

Bài 2. Cho 2 đường thẳng $(d_1):x-y+1=0;(d_2):2x+y+1=0$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng trên tại A,B sao cho M là trung điểm của AB.

Lời giải:

Giả sử $A(t_1;t_1+1)\in(d_1);B(t_2;-2t_2-1)\in(d_2)$

Điểm $M(2;1)$ là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\y_A+y_B=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+t_2=4\\(t_1+1)+(-2t_2-1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{10}{3}\\t_2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right),B\left(\frac{2}{3};\frac{-7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}(2;5)$$

Vậy phương trình đường thẳng $(d):\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}\Leftrightarrow(d):5x-2y-8=0.$

Bài 3. Cho 2 đường thẳng $(d_1):2x-y+5=0;(d_2):x+y-3=0$ và điểm $M(-2;0)$ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng trên lần lượt tại A,B sao cho $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}.$

Lời giải:

Giả sử $A(t_1;2t_1+5)\in(d_1);B(t_2;3-t_2)\in(d_2)$. Suy ra

$\overrightarrow{MA}=(2+t_1;2t_1+5),\overrightarrow{MB}=(t_2+2;3-t_2)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1+2=2(t_2+2)\\2t_1+5=2(3-t_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=1\\t_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(3;7)$

Vậy phương trình đường thẳng $(d):\frac{x+2}{3}=\frac{y}{7}\Leftrightarrow 7x-3y+14=0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y-4=0$ và $d_2: 2x-y-2=0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d_2 sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng d_1 tại điểm M thỏa mãn $OM.ON=8$.

Lời giải:

Gọi $N(a;2a-2)\in d_2; M(b;b-4)\in d_1$

Do O,M,N thẳng hàng nên hệ số góc đường thẳng OM bằng hệ số góc đường thẳng ON:

$\frac{2a-2}{a}=\frac{b-4}{b}\Leftrightarrow b=\frac{4a}{2-a}$

Ta có $OM.ON=8\Leftrightarrow\left(a^2+(2a-2)^2\right)\left(b^2+(b-4)^2\right)=64$, thay $b=\frac{4a}{2-a}$ vào ta được

$\left(5a^2-8a+4\right)^2=4(a-2)^2\Leftrightarrow\left(5a^2-6a\right)\left(5a^2-10a+8\right)=0\Leftrightarrow 5a^2-6a=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\frac{6}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}N(0;-2)\\ N\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm $N_1(0;-2); N_2\left(\frac{6}{5};\frac{2}{5}\right)$

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(4;1)$ cắt các trục tọa độ tại A,B sao cho.

1. Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

2. Tổng độ dài $OA+OB$ nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử (d) cắt các trục tọa độ tại $A(a;0),B(0;b),a,b>0$. Khi đó phương trình của (d) là $(d):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Do $M(4;1)\in(d)\Rightarrow\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1(1)$.

1. Ta có $S_{OAB}=\frac{1}{2}ab$, theo (1) ta có $1=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}.\frac{1}{b}}=\frac{4}{\sqrt{ab}}\Rightarrow ab\geq 16\Rightarrow S_{OAB}\geq 8$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=8,b=2\Rightarrow(d):\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$.

2. Ta có $OA+OB=a+b=a+\frac{a}{a-4}=a-4+\frac{4}{a-4}+5\geq 2\sqrt{(a-4)\frac{4}{a-4}}+5=9$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a-4=\frac{4}{a-4} \Leftrightarrow a=6; b=3 \Rightarrow (d): \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.

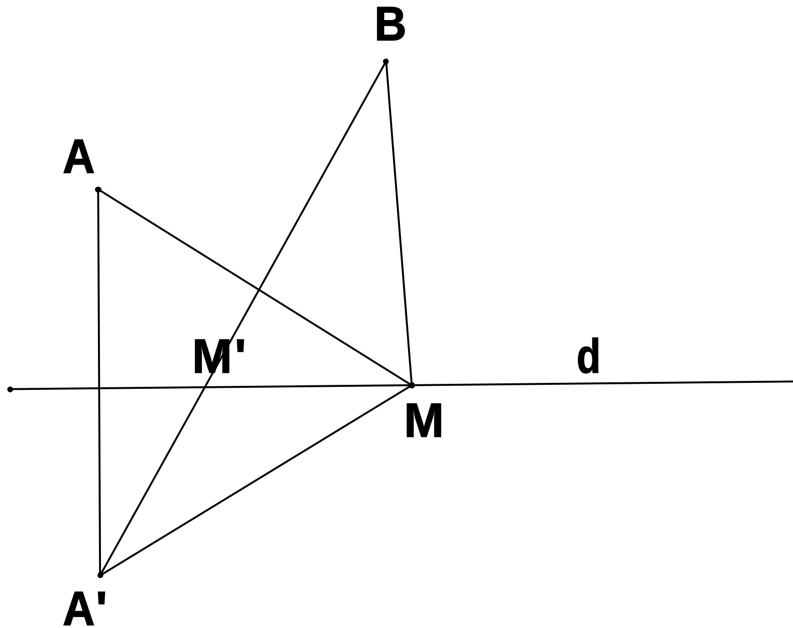
Bài 5. Cho 2 điểm $A(0;6), B(2;5)$. Tìm trên $(d): x-2y+2=0$ điểm M sao cho
1. $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Thay tọa độ 2 điểm A, B vào phương trình của $(d) \Rightarrow (-10)(-6)>0 \Rightarrow$ 2 điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng (d).

1. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $(d) \Rightarrow MA+MB=MA'+MB \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và (d).



Đường thẳng AA' đi qua A và vuông góc với $(d) \Rightarrow AA': 2x+(y-6)=0 \Leftrightarrow 2x+y-6=0$. Tọa độ giao điểm H của (d) và $A'A$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow H(2;2) \Rightarrow A'(4;-2).$$

Đường thẳng $A'B: \frac{x-4}{2-4}=\frac{y+2}{5+2} \Leftrightarrow 7x+2y-24=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\begin{cases} 7x+2y-24=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{11}{4};\frac{19}{8}\right).$

2. Ta có $|MA-MB| \le AB \Rightarrow |MA-MB|_{max} = AB \Leftrightarrow M = AB \cap (d)$

Đường thẳng $AB: x+2y-12=0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x+2y-12=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(5;\frac{7}{2}\right).$

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho 2 điểm $A(0;1), B(2;-1)$ và 2 đường thẳng: $(d_1):(m-1)x+(m-2)y+2-m=0; (d_2):(2-m)x+(m-1)y+3m-5=0$

Gọi P là giao điểm của $(d_1),(d_2)$. Xác định m để tổng $PA+PB$ lớn nhất.

Lời giải:

d_1, d_2 có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(m-1;m-2); \overrightarrow{n_2}=(2-m;m-1)$. Suy ra $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Rightarrow (d_1)\perp(d_2)$.

Dễ thấy $A\in(d_1), B\in(d_2) \Rightarrow \triangle PAB$ vuông tại P. Ta có

$(PA+PB)^2 \le 2(PA^2+PB^2)=2AB^2=16 \Rightarrow PA+PB \le 4.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác PAB vuông cân tại P, hay góc giữa đường thẳng AB và (d_1) bằng 45^0.

Ta có $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;1)$, từ đó suy ra

$$\cos 45^0 = \frac{|\overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_1}|}{|\overrightarrow{n_{AB}}|.|\overrightarrow{n_1}|} \Leftrightarrow \frac{|2m-3|}{\sqrt{(m-1)^2+(m-2)^2}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(2;1)$. Tìm tọa độ điểm B trên trục hoành, điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích lớn nhất, biết điểm B có hoành độ không âm.

Lời giải:

Gọi $B(b;0), C(0;c); b,c>0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b-2;-1), \overrightarrow{AC}=(-2;c-1)$

Tam giác ABC vuông tại A suy ra

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -2(b-2)-1(c-1)=0 \Leftrightarrow c=5-2b\ge 0 \Rightarrow 0\le b\le \frac{5}{2}$

Diện tích tam giác ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}\sqrt{4+(c-1)^2}=b^2-4b+5$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t)=t^2-4t+5, 0\le t\le \frac{5}{2}\Rightarrow f(t)\le f(0)=5$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $B(0;0), C(0;5)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(2;2)$ và hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0, d_2: x+y-8=0$. Tìm B,C tương ứng thuộc d_1,d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải:

Giả sử $B(b;2-b)\in d_1; C(c;8-c)\in d_2$. Ta có

$\overrightarrow{AB}=(b-2;-b), \overrightarrow{AC}=(c-2;6-c)$. Tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ AB^2=AC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-2)(c-2)-b(8-c)=0\\ (b-2)^2+b^2=(c-2)^2+(8-c)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ c=5\end{cases}\vee\begin{cases}b=-1\\ c=3\end{cases}$$

Vậy có hai cặp điểm B,C thỏa mãn đề bài là $B(3;-1), C(5;3)$ hoặc $B(-1;3), C(3;5)$.

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho bốn điểm $A(1;0)$ $B(-2;4), C(-1;4), D(3;5)$. Tìm điểm M trên đường thẳng $d: 3x-y-5=0$ sao cho hai tam MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Lời giải:

Ta có $AB=5, CD=\sqrt{17}$. Giả sử điểm $M(a;3a-5)$ thuộc đường thẳng d

Đường thẳng AB, CD lần lượt có phương trình là

$AB: 4x+3y-4=0; CD: x-4y+17=0$

Vậy diện tích tam giác MAB, MCD bằng nhau khi và chỉ khi

$$AB.d(M;AB)=CD.d(M;CD)\Leftrightarrow 5.\frac{|13a-19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{17}.\frac{|-11a+37|}{\sqrt{1^2+4^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{7}{3}\\ a=-9\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn bài toán là $M_1\left(\frac{7}{3};2\right), M_2(-9;-32)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và hai điểm $A(2;-3), B(3;-2)$. Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $3x-y-8=0$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $AB = \sqrt{2}$. Đường thẳng AB có phương trình là $AB: x - y - 5 = 0$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{ABG} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(G; AB) = \frac{2S_{ABG}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Gọi $G(a; 3a-8)$ suy ra

$\frac{|-2a+3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}\right. \Rightarrow G(1;-5), G(2;-2)$

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

Vì $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(2;-2) \\ C(1;-1) \end{array}\right.$

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(1;0)$ chân đường cao hạ từ đỉnh B là $K(0;2)$ và trung điểm cạnh AB là điểm $M(3;1)$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC.

Lời giải:

Đường cao BK đi qua hai điểm H, K nên có phương trình $BK: 2x + y - 2 = 0$.

Ta có $\overrightarrow{HK} = (-1; 2)$, đường thẳng AC đi qua K và nhận $\overrightarrow{HK}$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình $AC: x - 2y + 4 = 0$.

Do $A \in AC, B \in BK$ nên giả sử $A(2a-4; a), B(b; 2-2b)$. Vì điểm $M(3;1)$ là trung điểm của AB nên ta có hệ

$\begin{cases} 2a - 4 + b = 6 \\ a + 2 - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow A(4;4), B(2;-2)$

Từ đó suy ra phương trình cạnh $AB: 3x - y - 8 = 0$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với $\overrightarrow{HA} = (3;4)$ nên có phương trình là $BC: 3x + 4y + 2 = 0$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;4)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;0)$, trung điểm cạnh BC là điểm $M(0;-3)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết đỉnh B có hoành độ dương.

Lời giải:

Gọi N là trung điểm cạnh AC, vì tam giác ABH đồng dạng với tam giác MNI và AH song song với MI nên $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow A(-7;10)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Gọi $B(x;y), x>0 \Rightarrow \overrightarrow{IM}=(3;-3), \overrightarrow{MB}=(x;y+3)$. Với M là trung điểm cạnh BC nên $IM \perp MB$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp $IA=IB=\sqrt{116}$.
Do đó tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=116\\ -3x+3(y+3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\ y=4\end{cases} \Rightarrow B(7;4).$$
Vậy đường thẳng AB đi qua hai điểm A,B nên có phương trình là
$AB: 3x+7y-49=0$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đỉnh A,B nằm trên trục hoành, phương trình cạnh BC có phương trình là $BC: 4x+3y-16=0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

Lời giải:

Do điểm B thuộc đường thẳng BC và nằm trên Ox nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases}y=0\\ 4x+3y-16=0\end{cases} \Rightarrow B(4;0).$$
Giả sử $A(a;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(4-a;0)$, gọi $C\left(c;\dfrac{16-4c}{3}\right) \in BC$. Do tam giác ABC vuông tại A nên

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow c=a$. Vậy điểm $C\left(a;\dfrac{16-4a}{3}\right)$.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}|a-4|.\left|\dfrac{16-4a}{3}\right|$

Mặt khác ta lại có $S_{ABC}=pr=\dfrac{1}{2}\left(|a-4|+\left|\dfrac{16-4a}{3}\right|+\dfrac{5}{3}|a-4|\right);(p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}, r=1)$

Từ đó suy ra $|a-4|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=7\\ a=1\end{array}\right.$

+ Với $a=1 \Rightarrow A(1;0), B(4;0), C(1,4) \Rightarrow G\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$.

+ Với $a=7 \Rightarrow A(7;0), B(4;0), C(7,-4) \Rightarrow G\left(6;-\dfrac{4}{3}\right)$.

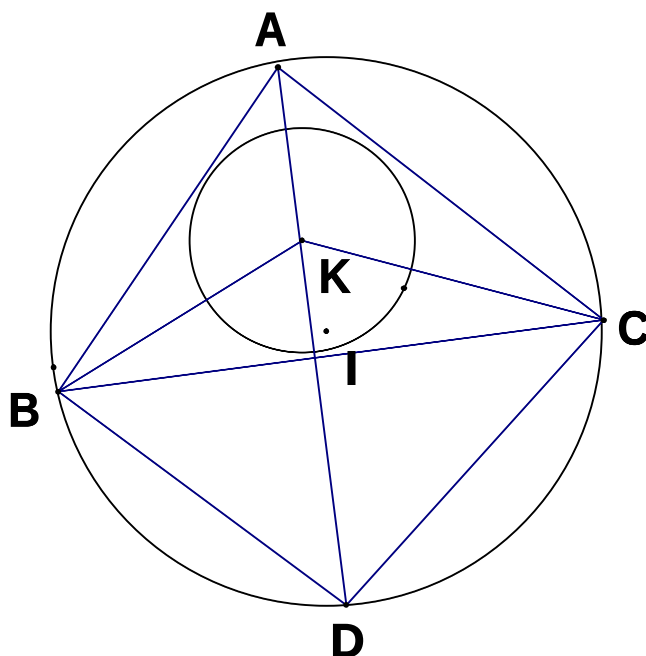
Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(6;6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(4;5)$, biết đỉnh $A(2;3)$. Xác định tọa độ đỉnh B,C.

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $IA = 5$, do vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$.

Đường phân giác AK đi qua hai điểm A, K nên có phương trình là $AK: x-y+1=0$, đường thẳng này cắt đường tròn (C) tại điểm $D(9;10)$.



Ta có $\widehat{DCK}=\widehat{DKC}=\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}$ nên tam giác DKB là tam giác cân.

Suy ra B, C là giao điểm của (C) và đường tròn tâm D bán kính $DK=\sqrt{50}$.

Vậy tọa độ B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25\\(x-9)^2+(y-10)^2=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=9\end{cases}\vee\begin{cases}x=10\\y=3\end{cases}$$

Vậy $B(2;9), C(10;3)$ hoặc $B(10;3), C(2;9)$.

Bài 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại A có phương trình hai cạnh $AB: y+1=0; BC: x+y-2=0$. Tính diện tích tam giác ABC biết AC đi qua điểm $M(-1;2)$.

Lời giải:

Đỉnh B là giao điểm của AB, BC nên tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow B(3;-1)$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và song song với BC, khi đó d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1)$.

Suy ra phương trình của $d:(x+1)+(y-2)=0 \Rightarrow d: x+y-1=0$.

Tạo độ giao điểm N của d và AB là nghiệm hệ

$\begin{cases} y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow N(2;-1)$.

Tam giác ABC cân tại A nên A nằm trên đường trung trực của MN. Viết được phương trình đường trung trực $MN: x-y=0$.

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y+1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;-1)$.

Từ đó ta có $AB=AC=4, AC\perp AB \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=8$.

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC. Biết đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong góc A lần lượt có phương trình là $d_1: 3x+4y+10=0$ và $d_2: x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải:

- Gọi M' là điểm đối xứng của M qua $d_2 \Rightarrow M' \in AC$.

Đường thẳng MM' đi qua M và vuông góc với d_2 nên $MM': x+y-2=0$

Gọi $I=d_2\cap MM' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và I là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(1;1)$

- Đường thẳng AC đi qua M' và vuông góc với d_1 nên nhận $\vec{u}=(3;4)$ làm một véc tơ chỉ phương, vậy $AC: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \end{cases}$

Và $A=d_2\cap AC \Rightarrow A(4;5)$

- Đường thẳng AB đi qua A và M nên $AB: \frac{x-4}{-4}=\frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow 3x-4y+8=0$

Có $B=d_1\cap AB \Rightarrow B\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$

- Điểm $C(1+3t;1+4t)\in AC$, do $MC=\sqrt{2} \Rightarrow (1+3t)^2+(4t-1)^2=2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow C(1;1) \\ t=\frac{2}{25} \Rightarrow C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right) \end{array}\right.$

Vậy các đỉnh của tam giác là $A(4;5), B\left(-3;-\frac{1}{4}\right), C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{31}{25};\frac{33}{25}\right)$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho $D(3;1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{5}{2};0\right) \Rightarrow BC$ song song với EF hay tam giác ABC cân tại A.

Đường thẳng AD vuông góc với EF nên có phương trình $x-3=0$

Do $F \in EF \Rightarrow F(t;3)$. Mặt khác lại có $BF=BD \Rightarrow \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2^2=\frac{5}{2}^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=-1$, suy ra $F(-1;3)$ và đường thẳng BF có phương trình:

$\frac{x-\frac{1}{2}}{-1-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$, khi đó tọa độ giao điểm A của AD và BF là $A\left(3;-\frac{7}{3}\right)$, loại trường hợp này vì không thỏa mãn A có tung độ dương.

Với $t=2 \Rightarrow F(2;3)$ và đường thẳng $BF: 4x-3y+1=0$, từ đó suy ra $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$, thỏa mãn.

Vậy $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x-y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C.

1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và có $AB=2BC$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại A có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. Phương trình đường thẳng $BC: x-2y-4=0$, đường thẳng $BG: 7x-4y-8=0$. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$. Đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình lần lượt là $2x+y+1=0; x+y-1=0$. Viết phương trình cạnh BC.

1.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có trung điểm $M(2;0)$ của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $7x-2y-3=0; 6x-y-4=0$. Viết phương trình cạnh AC.

1.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại $A(6;6)$. Đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB, AC có phương trình $x+y-4=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C, biết điểm $E(1;-3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

1.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0,\ d_2: x-y-4=0,\ d_3: x-2y=0$ Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng các từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hai điểm $A(0;2)$ và $B(-\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

1.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng $BC: \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$, các đỉnh A,B nằm trên trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tạo độ trọng tâm G của tam giác ABC.

1.10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông tại A,có đỉnh $C(-4;1)$ phân giác trong góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

1.11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC cân tại $A(-1;4)$ và các đỉnh B,C thuộc đường thẳng $x-y-4=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B,C biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

1.12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

1.13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;0), B(4;0), C(0;m); m\neq 0$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Xác định tọa độ ba đỉnh của tam giác.

1.15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $A(0;2)$ và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Viết phương trình đường thẳng d biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

1.16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh huyền nằm trên đường thẳng $x+7y-31=0$, điểm $N(7;7)$ nằm trên cạnh AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc cạnh AB và nằm ngoài đoạn AB. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác cân, có cạnh đáy $BC: x-3y-1=0$. Cạnh bên $AB: x-y-5=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-4;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

1.18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;1), B(-2;5)$, trọng tâm thuộc đường thẳng $2x+3y-1=0$. Đỉnh C thuộc đường thẳng $x+y-1=0$. Tính diện tích tam giác ABC.

1.19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho tam giác ABC biết đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $6x-5y-7=0; x-4y+2=0$. Tính diện tích tam giác ABC, biết trọng tâm của tam giác nằm trên trục hoành và đường cao xuất phát từ đỉnh B đi qua điểm $M(1;-4)$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ TỨ GIÁC

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có điểm $A(1;0), B(2;0)$. Giao điểm I của 2 đường chéo thuộc đường thẳng $y=x$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành, biết diện tích hình bình hành bằng 4.

Lời giải:

Giả sử tọa độ tâm $I(a;a)$, do điểm C đối xứng với A qua I và điểm D đối xứng với B qua I.

Suy ra $C(2a-1;2a), D(2a-2;2a)$.

Đường thẳng AB chính là trục hoành: $y=0$, ta có $d(I;AB)=|a|, AB=1 \Rightarrow$

$S_{ABCD}=4S_{IAB}=2d(I;AB).AB=2|a|=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$

+ Với $a=2 \Rightarrow C(3;4), D(2;4)$.

+ Với $a=-2 \Rightarrow C(-5;-4), D(-6;-4)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(6;2\right)$, điểm $M\left(1;5\right)\in AB$ và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải:

Gọi N đối xứng với M qua $I\Rightarrow N\left(11;-1\right)$. Giả sử tọa độ điểm $E\left(x_0;5-x_0\right)$

Ta có $\overrightarrow{IE}=\left(x_0-6;3-x_0\right),\overrightarrow{NE}=\left(x_0-11;6-x_0\right)$. Do $IE\perp NE\Rightarrow\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE}=0$

$$\Rightarrow\left(x_0-6\right)\left(x_0-11\right)+\left(3-x_0\right)\left(6-x_0\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=6\\x_0=7\end{array}\right.$$

+ Với $x_0=6\Rightarrow\overrightarrow{IE}=\left(0;-3\right)\Rightarrow AB:y-5=0.$

+ Với $x_0=7\Rightarrow\overrightarrow{IE}=\left(1;-4\right)\Rightarrow AB:x-4y+19=0.$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 12, tâm I giao điểm của đường thẳng $\left(d_1\right):x-y-3=0$ và đường thẳng $\left(d_2\right):x+y-6=0$. Trung điểm một cạnh là giao điểm của $\left(d_1\right)$ với trục hoành. Xác định tọa độ bốn đỉnh hình chữ nhật.

Lời giải:

Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-y-3=0\\x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right).$$

Do vai trò các đỉnh A,B,C,D là như nhau, nên ta giả sử đó là trung điểm M của cạnh AD.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=0\\x-y-3=0\end{cases}\Rightarrow M\left(3;0\right).$$

Suy ra $AB=2IM=3\sqrt{2}$. Mặt khác $S_{ABCD}=AB.AD\Rightarrow AD=\dfrac{S_{ABCD}}{AB}=\dfrac{12}{3\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

Vì M,I cùng thuộc $\left(d_1\right)$ suy ra $AD\perp\left(d_1\right)$, vậy AD đi qua điểm M và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(1;1\right)\Rightarrow AD:\left(x-3\right)+y=0\Leftrightarrow x+y-3=0.$

Lại có $MA=MD=\dfrac{AD}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow$ Tọa độ điểm A,D là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y-3=0\\\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}\Rightarrow A\left(2;1\right),D\left(4;1\right).$$

Các điểm C,B lần lượt đối xứng với A,B qua I. Suy ra tọa độ điểm $C\left(7;2\right),B\left(5;4\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, đường thẳng $AB: x-2y+2=0$, $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật biết đỉnh A có hoành độ âm.

Lời giải:

Cạnh AD, BC vuông góc với AB nên phương trình có dạng: $2x+y+c=0$, do

$AB=2AD \Rightarrow d\left(I;AB\right)=\frac{1}{2}d\left(I;AD\right)$.

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\frac{\left|1+c\right|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-6 \\ c=4 \end{array}\right.$$

+ Do đó đường thẳng AD, BC có phương trình

$2x+y-6=0; 2x+y+4=0.$ Khi đó tọa độ các đỉnh A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Do điểm A có hoành độ âm nên $A\left(-2;0\right), B\left(2;2\right)$. Điểm C đối xứng với A qua I nên $C\left(3;0\right)$ và điểm $D\left(-1;-2\right)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh $A\left(1;0\right), B\left(3;2\right); \angle ABC=120^0$. Xác định tọa độ 2 đỉnh C, D.

Lời giải:

Theo giả thiết suy ra tam giác ABD đều, ta có tọa độ trung điểm M của AB là $M\left(2;1\right)$, có $\overrightarrow{AB}=\left(2;2\right)$. Vậy phương trình đường trung trực của AB là

$\left(x-2\right)+\left(y-1\right)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$. Điểm D thuộc đường trung trực AB nên gọi $D\left(t;3-t\right)$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AD^2=AB^2 \Rightarrow \left(t-1\right)^2+\left(3-t\right)^2=8 \Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$

+ Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow D\left(2+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right), C\left(-\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right)$.

+ Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow D\left(2-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right), C\left(-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right)$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CA, AD lần lượt đi qua các điểm $M\left(4;5\right), N\left(6;5\right), P\left(5;2\right), Q\left(2;1\right)$. Viết phương trình cạnh AB, biết hình chữ nhật có diện tích bằng 16.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Giả sử phương trình cạnh $AB: a(x-4)+b(y-5)=0, a^2+b^2>0$

Khi đó $BC: b(x-6)-a(y-5)=0$.

Ta có $S_{ABCD}=d(P;AB).d(Q;BC) \Rightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{|-4b+4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=-\frac{1}{3}b \end{array}\right.$

+ Với $a=-b$, chọn $b=1; a=-1 \Rightarrow AB: -x+y-1=0$.

+ Với $a=-\frac{1}{3}b$, chọn $b=1; a=-\frac{1}{3} \Rightarrow AB: -x+3y-11=0$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh BC, CD sao cho $BM=CN$. Biết $AM \cap BN = I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$. Xác định tọa độ đỉnh C.

1.2. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $y=3x$, đường thẳng BD có phương trình $x-2y=0$. Góc tạo bởi 2 đường thẳng AB, BC bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24, điểm B có hoành độ dương.

1.3. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $B(1;5)$, đường cao $AH: x+2y-2=0$, phương trình đường phân giác góc C là $x-y-1=0$. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, C, D.

1.4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $D(-1;3)$, đường phân giác trong của góc A là $x-y+6=0$. Tìm tọa độ đỉnh B, biết diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 18 và đỉnh A có tọa độ thỏa mãn $|x_A|=|y_A|$.

1.5. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB, CD lần lượt có phương trình là $x-2y+5=0; x-2y+1=0$. Viết phương trình đường thẳng AD, BC biết điểm $M(-3;3)$ thuộc đường thẳng AD và điểm $N(-1;4)$ thuộc đường thẳng BC.

1.6. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(1;1)$, biết điểm $M(-2;2)$ thuộc cạnh AB và điểm $N(2;-2)$ thuộc cạnh CD. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông.

1.7. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm $M(-3;-2)$ thuộc cạnh AB, đường tròn nội tiếp hình vuông có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=10$. Xác định tọa độ bốn đỉnh hình vuông, biết điểm A có hoành độ dương.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

1.9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết đỉnh A thuộc d_1 và đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D nằm trên trục hoành.

1.10. Cho hình thoi $ABCD$ có một đường chéo là $x+2y-7=0$ và một cạnh có phương trình $x+3y-3=0$. Viết phương trình ba cạnh và đường chéo còn lại của hình thoi, biết một đỉnh của hình thoi là $(0;1)$.

BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG TRÒN

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng $(d): x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua gốc tọa độ và điểm $A(-1;1)$ đồng thời tiếp xúc với đường thẳng (d).

Lời giải:

Giả sử đường tròn có tâm $I(a;b)$, theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = d^2(I;(d)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (-1-a)^2+(1-b)^2 \\ a^2+b^2 = \dfrac{\left(a-b+1-\sqrt{2}\right)^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+1 \\ a^2+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

vậy có 2 đường tròn là

$x^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(x+1)^2+y^2=1$.

Bài 2. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;1)$ và cắt đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$ theo dây cung MN có độ dài bằng 4.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2), R=3$.

Đường thẳng $(d): a(x-2)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a-b=0, a^2+b^2>0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $d\left(I;(d)\right)=\sqrt{R^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$

Vậy $\frac{|b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{11}}{4}b$

+ Với $a=\frac{3+\sqrt{11}}{4}b$,chọn $b=4, a=3+\sqrt{11}\Rightarrow (d):\left(3+\sqrt{11}\right)x+4y-2\sqrt{11}-10=0.$

+ Với $a=\frac{3-\sqrt{11}}{4}$, chọn $b=4, a=3-\sqrt{11}\Rightarrow (d):\left(3-\sqrt{11}\right)x+4y+2\sqrt{11}-10=0.$

Bài 3. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=1$ có tâm $I(1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $\angle IMO=30^0$.

Lời giải:

Nhận thấy điểm $O(0;0)$ thuộc đường tròn (C) nên $IM=IO=1$.

Tam giác MIO cân tại $I, \angle IMO=30^0\Rightarrow\angle MIO=120^0$

Gọi điểm $M(a;b)\in(C)\Rightarrow(a-1)^2+b^2=1(1)$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác MIO ta có

$OM^2=IM^2+IO^2-2IO.IM\cos120^0=3\Rightarrow a^2+b^2=3(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;3)$ và cắt hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=13;(C_2):(x-6)^2+y^2=25$ lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

Lời giải:

Gọi $M(x;y)\in(C_1)\Rightarrow x^2+y^2=13, x\neq 2(1)$. Do A là trung điểm của MN nên $N(4-x;6-y)$.

Nhưng $N\in(C_2)\Rightarrow(2+x)^2+(6-y)^2=25(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x=-\frac{17}{5}, y=\frac{6}{5}\Rightarrow M\left(\frac{17}{5};\frac{6}{5}\right)$

Đường thẳng (d) đi qua A, M nên $(d):x-3y+7=0.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Cho đường thẳng $(d): x-7y+10=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng $2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm $A(4;2)$.

Lời giải:

Giả sử đường tròn (C) có tâm $I(x;-2x) \Rightarrow \overrightarrow{IA}=(x-4;-2x-2)$. Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại A suy ra $IA \perp (d) \Rightarrow 7(x-4)+(-2x-2)=0 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow I(6;-12)$, bán kính $R=IA=10\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn $(C):(x-6)^2+(y+12)^2=200$.

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ,cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $(d): x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng (d).

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2), R=2$.

Đường tròn (C') đối xứng với (C) qua (d) nên có tâm I' là điểm đối xứng của I qua (d) và bán kính $R=2$.

Gọi $H(x;x-1)\in(d)$ là tọa độ chân đường vuông góc hạ từ I , ta có $\overrightarrow{IH}=(x-1;x-3)$ và $IH \perp (d) \Rightarrow (x-1)+(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow H(2;1)$

Điểm I' đối xứng với I qua $H \Rightarrow I'(3;0)$

Vậy phương trình đường tròn $(C'):(x-3)^2+y^2=4$.

Bài 7. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $(d): 3x-4y+m=0$. Xác định m để trên (d) có duy nhất một điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) đến đường tròn (C) sao cho tam giác MAB đều.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2), R=3$

Tam giác MAB đều suy ra tam giác MIA là nửa tam giác đều, suy ra $MI=2IA=6$.

Vậy điểm M thuộc đường tròn (C') có tâm I bán kính $R=6$, điểm M là duy nhất suy ra đường thẳng (d) tiếp xúc với (C'). Từ đó suy ra

$$d(I;(d))=6 \Leftrightarrow \frac{|m+11|}{\sqrt{1^2+7^2}}=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=19 \\ m=-41 \end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 8. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $(d): x+my-2m+3=0$. Gọi I là tâm của (C), tìm m để đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ bán kính $R=\sqrt{2}$.

Ta có $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB\sin\widehat{AIB}=\frac{1}{2}R^2\sin\widehat{AIB}\le\frac{1}{2}R^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{AIB}=90^0 \Rightarrow$ Suy ra

$$d(I;(d))=\frac{R}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\frac{|1-4m|}{\sqrt{1+m^2}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\frac{8}{15}\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho điểm $A(1;0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

1.2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy, cho 2 đường thẳng $(d_1):\sqrt{3}x+y=0$ và $(d_2):\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với (d_1) tại A, cắt (d_2) tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết rằng tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

1.3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2), B(-2;-2), C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao hạ từ B; M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

1.4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $(d_1): x-y=0, (d_2): x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kinh đường tròn (C_1), biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ và có tâm K thuộc đường tròn (C).

1.5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho tam giác ABC có $A(3;-7)$ và trực tâm $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

1.7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d: x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) tiếp xúc ngoài với (C).

1.8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đecac vuông góc Oxy cho đường tròn $(T):(x-4)^2+y^2=40$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cắt (T) tại hai điểm A, B sao cho $AB=4BO$.

1.9. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-6y+12=0$ có tâm I và đường thẳng $(d): x+y-4=0$. Tìm trên (d) điểm M sao cho tiếp tiếp với đường tròn (C) kẻ từ M tiếp xúc với (C) tại A, B và diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

1.10. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có $A(2;-2), B(4;0), C\left(3;\sqrt{2}-1\right)$. Viết điểm M thuộc đường thẳng $4x+y-4=0$ sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tiếp xúc với (C) tại N và diện tích tam giác NAB lớn nhất.

1.11. Cho đường tròn $(C): x^2-8x+y^2+12=0$. Tìm điểm M nằm trên trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) đến (C) và đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm đi qua $I(8;5)$.

1.12. Cho đường tròn tâm I $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm điểm M nằm trên đường thẳng $x-y+2=0$, sao cho từ M kẻ 2 tiếp tuyến đến (C) tiếp xúc tại A, B và diện tích tứ giác $MIAB$ bằng $6\sqrt{2}$.

1.13. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2;2)$ và cắt đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-14=0$ tại hai điểm A, B sao cho $MA=3MB$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

1.1. Trong mặt phẳng xOy tìm điểm A trên đường thẳng $d: x-2y+1=0$ biết qua A kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm) đến đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=1$ sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. Trong mặt phẳng xOy tìm tọa độ ba đỉnh tam giác ABC vuông tại có trọng tâm $G\left(1;\frac{5}{3}\right)$ và A,B,C lần lượt thuộc ba đường thẳng $d_1: 3x+y-8=0$ $d_2: x-y=0; d_3: x-3y+4=0$.

1.3. Trong mặt phẳng xOy cho tam giác ABC có A nằm trên trục hoành $\left(0<x_A<\frac{5}{2}\right)$ và hai đường cao kẻ từ B,C lần lượt có phương trình là $d_1: x-y+1=0$ và $d_2: 2x+y-4=0$. Tìm tọa độ ba đỉnh A,B,C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

1.4. Trong mặt phẳng xOy cho hai đường tròn $(C_1):(x-3)^2+(y+1)^2=10$ và $(C_2):(x-1)^2+(y+7)^2=50$. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cắt hai đường tròn trên hai dây cung bằng nhau.

1.5. Trong mặt phẳng tọa độ xOy viết phương trình bốn cạnh hình vuông không song song với các trục tọa độ; có tâm là gốc tọa độ và hai cạnh kề của hình vuông lần lượt đi qua hai điểm $M(-1;2); N(3;-1)$.

1.6. Trên mặt phẳng tọa độ xOy lấy hai điểm A,B nằm trên elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ và đối xứng qua điểm $M\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$. Xác định tọa độ điểm $C\in(E)$ sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

1.7. Trong mặt phẳng xOy cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2mx-my+m-2=0$ và đường tròn $(C_2): x^2+y^2-3x+1=0$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để số tiếp tuyến chung của hai đường tròn trên là một số lẻ.

1.8. Trên mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$, tâm đường tròn nội tiếp là $I(2;1)$. Cạnh AB có phương trình $x-y+1=0\ (x_A<x_B)$. Xác định tọa độ ba đỉnh A,B,C.

1.9. Trong mặt phẳng tọa độ xOy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC vuông tại $A(1;4)$ có phương trình cạnh $BC: x+2y+3=0$, và tâm(có hoành độ âm) và cách A một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

1.10. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình thang cân $ABCD$ co hai đáy là AB,CD và hai đường chéo AC,BD vuông góc với nhau. Biết $A(0;3); B(3;4)$, C nằm trên trục hoành. Xác định tọa độ đỉnh D của hình thang.

1.11. Trong mặt phẳng xOy cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2=1$ và đường tròn $(C_2):(x-1)^2+(y-1)^2=10$. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C_1) và cắt (C_2) một đoạn $AB=6$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.12. Trong mặt phẳng tọa độ xOy tìm tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC vuông tại A có $A \in d_1 : x - y + 3 = 0\left(x_A > 0\right); B \in Ox$, trung điểm cạnh AB nằm trên đường thẳng $d_2 : 3x - 4y + 8 = 0$ và $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1.13. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC với $B\left(1;2\right)$. Đường phân giác trong Δ của góc A có phương trình $2x + y - 1 = 0$, khoảng cách từ C đến Δ bằng hai lần khoảng cách từ B đến Δ. Tìm tọa độ của A, C biết C nằm trên trục tung.

1.14. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn là CD, đường thẳng AD có phương trình $3x - y = 0$, đường thẳng BD có phương trình $x - 2y = 0$, góc tọa bởi hai đường thẳng AB và BC bằng 45^0. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

1.15. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường thẳng $\left(d\right): x - y + 1 = 0$ và đường tròn $\left(T\right): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng $\left(d\right)$ sao cho qua M ta kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn $\left(T\right)$(A, B là các tiếp điểm) đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(\frac{1}{2};1\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

1.16. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $x + y + 2 = 0$, đường cao xuất phát từ đỉnh B là $2x - y + 1 = 0$. Cạnh AB đi qua điểm $M\left(1;1\right)$, tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$.

1.17. Trong mặt phẳng xOy cho $A\left(1;2\right)$ và các đường thẳng $d_1 : x + 2y - 1 = 0$ $d_2 : x + 2y + 8 = 0$. Tìm điểm $B \in d_1, D \in d_2$ và điểm C sao cho $ABCD$ là hình vuông.

1.18. Trong mặt phẳng xOy cho đường tròn $\left(C_1\right): x^2 + y^2 = 64$ và điểm $A(3;4)$. Đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm I_2 và đi qua trung điểm của I_2A. Viết phương trình đường tròn $\left(C_2\right)$ sao cho bán kính của đường tròn này là nhỏ nhất.

1.19. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, phương trình đường phân giác trong góc A là $x - y + 1 = 0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$. Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp ba lần diện tích tam giác IBC.

1.20. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình thoi $ABCD$, phương trình cạnh BD là $x - y = 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $P(1;\sqrt{3})$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q(-2;-2\sqrt{3})$. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi, biết độ dài $AB = AC$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

1.21. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường thẳng $d_1 : 2x - 3y - 3 = 0$ và đường thẳng $d_2 : 5x + 2y - 17 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 đồng thời cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại A, B sao cho $\frac{AB^2}{S_{OAB^2}}$ nhỏ nhất.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.22. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có $BC = CD = 2AB$, trung điểm cạnh BC là điểm $M(1;0)$, đường thẳng AD có phương trình là $x - \sqrt{2}y = 0$. Xác định tọa độ đỉnh A.

1.23. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho đường tròn $(C):(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Gọi M là điểm sao cho trung tiếp tuyến qua M tiếp xúc với (C) tại E, cát tuyến qua M cắt (C) tại A, B sao cho tam giác ABE vuông cân tại B. Tìm tọa độ của M sao cho khoảng cách từ M đến O là ngắn nhất.

1.24. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 34; $M(6;-1)$ là trung điểm cạnh BC. Đường thẳng $\Delta: 15x + 8y - 48 = 0$ đi qua tâm của hình chữ nhật và cắt đường thẳng AD tại một điểm thuộc trục tung. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

1.25. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + (y-2)^2 = 1$ và $(C_2):(x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$. Tìm điểm A trên (C_1), điểm B trên (C_2) và điểm C trên trục hoành sao cho tổng $AC + CB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.26. Trong mặt phẳng tọa độ xOy cho điểm $M(-1;0)$ và đường tròn $(C): x^2 + (y+1)^2 = 1$. Viết phương trình đường thẳng d qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB lớn nhất.

1.27. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC. Biết đường cao kẻ từ đỉnh B và phân giác trong góc A lần lượt có phương trình là $d_1: 3x + 4y + 10 = 0$ và $d_2: x - y + 1 = 0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB đồng thời cách C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

1.28. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ xOy cho tam giác ABC có $AB = 3AC$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y = 0$; đường cao hạ từ đỉnh B có phương trình là $3x + y - 16 = 0$. Xác định tọa độ ba đỉnh A, B, C biết cạnh AB đi qua điểm $M(4;10)$.

1.29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tìm điểm P thuộc đường thẳng $3x - 2y - 1 = 0$ và điểm Q thuộc đường thẳng $2x + y + 3 = 0$ sao cho đường thẳng $7x - y + 8 = 0$ là trung trực của đoạn thẳng PQ.

1.30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $K(3;2)$ tìm điểm M thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ với tâm $I(1;2)$ sao cho $\widehat{IMK} = 60^0$.

1.31. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, tìm điểm B thuộc trục hoành và điểm A trên đường thẳng $y - 1 = 0$ sao cho đường thẳng đi qua A cắt đường tròn $(C):(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt M, N (M nằm giữa A, N); M trung điểm của AN và tam giác ABM cân tại M.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $B\left(0;5-2\sqrt{3}\right)$, đường tròn $\left(C\right):x^2+\left(y-1\right)^2=4$ và đường thẳng $d:y=x-1$ cắt đường tròn $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt M,N. Tìm điểm A thuộc đường thẳng d (A nằm ngoài đường tròn $\left(C\right)$) sao cho $AB^2=AM.AN$.

1.33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(-1;-2\right)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật $ABCD$ biết rằng tam giác IOM có diện tích bằng 4, đường thẳng AB đi qua $N\left(11;3\right)$ và cạnh AD tiếp xúc với đường tròn $\left(C\right):\left(x+1\right)^2+\left(y+2\right)^2=2$

1.34. Tìm m để trên đường thẳng $d:3x-4y+m=0$ tồn tại duy nhất một điểm P có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA,PB (A,B là các tiếp điểm) tới đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=9$ sao cho tam giác PAB đều.

1.35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A\left(4;4\right);B\left(8;-2\right)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $d:3x+2y-7=0$ sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất.

1.36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d:2x+y-5=0$ và điểm $M\left(-3;1\right)$. Viết phương trình đường tròn $\left(C\right)$ đi qua điểm $K\left(-1;3\right)$ và cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt A,B sao cho MA,MB là hai tiếp tuyến vuông góc của đường tròn $\left(C\right)$.

1.37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d_1:x+2y-1=0$ và $d_2:x+2y-3=0$ và hai điểm $A\left(-2;-3\right),B\left(1;3\right)$. Tìm hai điểm M thuộc d_1, N thuộc d_2. Biết rằng MN vuông góc với d_1 và độ dài đường gấp khúc $AMNB$ ngắn nhất.

1.38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(4;0\right)$ bán kính $R=2$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA,MB (A,B là các tiếp điểm) đến $\left(C\right)$ và AB đi qua điểm $E\left(4;1\right)$.

1.39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A\left(0;0\right);B\left(2;4\right);C\left(6;0\right)$ và các điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm $P;Q$ trên cạnh AC. Xác định tọa độ bốn điểm M,N,P,Q biết $MNPQ$ là hình vuông.

1.40. Cho đường tròn $\left(T\right):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=1$ và đường thẳng $\left(\Delta\right):2x-y+1=0$. Tìm điểm A thuộc đường thẳng $\left(\Delta\right)$ sao cho từ A kẻ được các tiếp tuyến AB,AC (B,C là các tiếp điểm) đến $\left(T\right)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{10}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.41. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(T):(x-4)^2+(y-6)^2=5$ và hai điểm $A(2;5);B(6;5)$ nằm trên (T). Đỉnh C của tam giác ABC di động trên đường tròn (T). Tìm tọa độ trực tâm H H của tam giác ABC biết H nằm trên đường thẳng $(\Delta):x-y+1=0$.

1.42. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(T):x^2+y^2+3x-6y=0$. Gọi M,N là hai điểm di động trên (T) sao cho $\widehat{MON}=30^0$ (với O là gốc tọa độ). Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OMN biết G nằm trên đường thẳng $(\Delta):x-y+1=0$.

1.43. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(T):(x+2)^2+(y-1)^2=4$. Gọi M là điểm sao cho tiếp tuyến qua M tiếp xúc với (T) tại E, cát tuyến qua M cắt (T) tại A,B sao cho tam giác ABE vuông cân tại B. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ M đến O là ngắn nhất.

1.44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(2;4)$ và hai đường thẳng $d_1:2x-y-2=0$ và $d_2:2x+y-2=0$. Viết phương trình đường tròn (T) có tâm I, cắt d_1 tại hai điểm A,B và cắt d_2 tại hai điểm C,D sao cho $AB+CD=\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

1.45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(4;-1)$, phương trình đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh A lần lượt có phương trình là $x+y-1=0$ và $x+2y-1=0$. Viết phương trình các cạnh tam giác ABC.

1.46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(3;4);B(1;2);C(5;0)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất $P=2.d(B;(d))+d(C;(d))$, ở đây $d(B;(d));d(C;(d))$ lần lượt là khoảng cách từ điểm B,C đến đường thẳng d.

1.47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1:2x+y-2=0;d_2:x-2y+1=0$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$ xuống $d_1;d_2$ và trục hoành. Chứng minh rằng ba điểm A,B,C thẳng hang.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam